6. **RANGUL UNEI MATRICE**

Definitia 23. Fie A o matrice de ordin m x n. Se numeste rang al matricei A si se noteaza prin rang (A) ordinul maxim al minorului sau nenul.

Aceasta inseamna ca exista cel putin un minor al lui A de ordin r care este nenul si toti minorii lui A de ordin ($r + 1$) sunt nuli. Pentru determinarea rangului unei matrice procedam astfel:

pornind de la elementele matricei A , trecem de la minorii de ordin inferior la cei de ordin superior ;

prsupunand ca am gasit minorul nenul M de ordin r, calculam toti minorii de ordin $r + 1$ obtinuti din M prin bordare cu o linie si o coloana. Daca toti acesti minori sunt nuli, rangul este r iar daca macar unul este nenul, atunci se reia procedeul pentru noul minor nenul.

Exemplu: Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Consideram minorul de ordin 2, $M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7 \neq 0$.

Formam minori de ordinul trei care il contin pe M.

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 13 \; ; \quad M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -6 \quad \text{etc.}$$

Cautam minori de ordinul patru care incadreaza pe M_1.

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$= 2(8+1+4)-(-16+2+8)+2(4+4)-3(8+8)=26+6+16-48=0$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (8+1+4)-(-8+1+4+4)+2(4+2+2+8)-3(-2+4+4) = 13-1+32-18 = 26 \neq 0$$

Cum M_3 este nenul $\Rightarrow rang(A) = 4$

EXERCITII DE REZOLVAT

1. Sa se calculeze A^{-1} pentru urmatoarele matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Sa se determine rangul matricelor:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & m & 1 & 0 \end{pmatrix}$$